MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

ŽUPANIJSKO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE
15. ožujka 2010.

8. razred-osnovna škola

1. Broj 10 000 napisati kao umnožak dva broja koji ne završavaju nulama.

2. Na ploči je napisano 10 uzastopnih brojeva. Kada se izbriše jedan od njih, zbroj devet preostalih brojeva iznosi 2009. Koji broj je izbrisan?

3. Dijagonale jednakokračnog trapeza ABCD su međusobno okomite i sijeku se u točki S. Odredi duljinu dijagonale trapeza ako je $|CS|:|SA| = 7:17$, a opseg trapeza $50\sqrt{2}$ mm.

4. Iz mjesta *A* krenuo je autobus u mjesto *B* brzinom od 40 km/h. Nakon 15 minuta vožnje autobus se susreo s automobilom koji se kretao iz mjesta *B* u mjesto *A* brzinom od 50 km/h. Nakon susreta oba vozila su nastavila vožnju, svaki u svoje mjesto. Kada je automobil stigao u mjesto *A*, odmorio se 15 minuta i nastavio vožnju natrag u mjesto *B* pa je tako 20 km od mjesta *B* sustigao autobus. Kolika je udaljenost mjesta *A* i mjesta *B*?

5. Prednje staklo autobusa je pravokutnog oblika, visine 1.5 m i duljine $1.5\sqrt{3}$ m, a brisači stakla učvršćeni su u donjem lijevom i donjem desnom kutu stakla. Ako je duljina brisača jednaka visini prednjeg stakla autobusa, koliki postotak površine stakla brišu brisači?

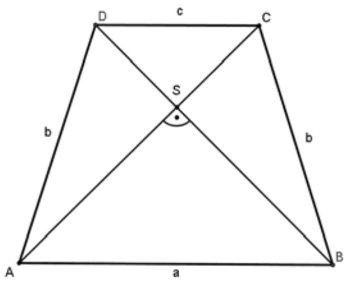
Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. ožujka 2010.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $10000 = 10^4 =$ 3 BODA
$= (2 \cdot 5)^4 =$ 3 BODA
$= 2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 625$ 4 BODA
………………………………………………………………. UKUPNO 10 BODOVA
2. Neka je x najmanji od 10 uzastopnih brojeva.
Tada je x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)+(x+8)+(x+9)-(x+y)=2009, pri čemu je (x+y) izbrisani broj i $0 \leq y \leq 9$. 2 BODA
Sređivanjem slijedi 9x-y=1964 odnosno 9x=1964+y. 3 BODA
Kako je $9 \cdot 219 = 1964 + 7$, onda je x=219 i y=7. 3 BODA
Izbrisani broj je 219+7 odnosno 226. 2 BODA
………………………………………………..…………… UKUPNO 10 BODOVA
3. Kako je trapez jednakokračan, onda je $|AD| = |BC|$ i $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC|$. S obzirom da je stranica $\overline{AB}$ zajednička trokutima $\Delta ABD$ i $\Delta ABC$, prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ABD \cong \Delta BAC$. To znači da je $|AC| = |BD|$ i $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BAC|$. Dakle, trokut $\Delta ABS$ je jednakokračan pravokutan. 3 BODA




Zato možemo pisati $|AS| = |BS| = 17x$, $|CS| = |DS| = 7x, x \in \mathbb{R}^+$. Prema Pitagorinom poučku slijedi $a^2 = (17x)^2 + (17x)^2$ odnosno $a = 17x\sqrt{2}$ mm. Slično slijedi $c = 7x\sqrt{2}$ mm i $b = 13x\sqrt{2}$ mm. 3 BODA
Budući da je opseg trapeza $O = 50\sqrt{2}$, onda je $17x\sqrt{2} + 2 \cdot 13x\sqrt{2} + 7x\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$ odnosno $x = 1$. 2 BODA
Dalje je $|AC| = |BD| = 17x + 7x = 24x = 24$.
Dijagonale trapeza su duljine 24 mm. 2 BODA
………………………………………………..……………… UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je *C* mjesto u kojem je autobus susreo automobil, a *D* mjesto u kojem je automobil sustigao autobus. Tada je $|AC| = 10$ km i $|BD| = 20$ km. 1 BOD

   Neka je $x = |CD|$. Put od *C* do *D* autobus je prešao za $\frac{x}{40}$ h. Za to vrijeme je automobil prešao put od *C* do *A* i put od *A* do *D* odnosno put duljine $(10 + 10 + x)$ km, a za to mu je trebalo ( $\frac{x+20}{50} + \frac{1}{4}$) h. 3 BODA

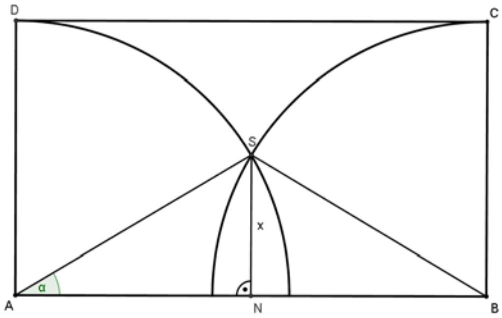
   Zato vrijedi jednadžba $\frac{x+20}{50} + \frac{1}{4} = \frac{x}{40}$. 2 BODA

   Rješavanjem jednadžbe slijedi $x = 130$. 2 BODA

   Udaljenost mjesta *A* i mjesta *B* je 10+130+20 odnosno 160 km. 2 BODA

   …………………………………………………………………. UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je $a$ duljina ,a $b$ visina prednjeg stakla autobusa. Tada je $a = 1.5\sqrt{3}, b = 1.5$ .
   Budući da je $\sqrt{3} < 2$, onda je $a < 2b$. 1 BOD

   Neka su oznake kao na slici

   Kako je $|AS| = |BS| = b$, onda je $\Delta ABS$ jednakokračan pa je $|\sphericalangle NBS| = |\sphericalangle SAN|$ i visina $\overline{SN}$ na osnovicu $\overline{AB}$ raspolavlja tu osnovicu, tj, $|AN| = |BN| = \frac{a}{2}$ . 2 BODA

   S obzirom da je $\Delta ANS$ pravokutan, prema Pitagorinom poučku vrijedi $|AN|^2 + |NS|^2 = |AS|^2$ pa je $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 = b^2$ odnosno $\left(\frac{1.5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x^2 = 1.5^2$.

   Slijedi $x = \frac{1.5}{2}$ odnosno $x = \frac{b}{2}$ što znači da je $\Delta ANS$ polovica jednakostraničnog trokuta. Dakle, $\alpha = 30°$. 3 BODA

   Neka je $P_1$ površina kružnog isječka u krugu polumjera $\overline{AS}$ sa središnjim kutom $\alpha$, $P_2$ površina kružnog isječka u krugu polumjera $\overline{AD}$ sa središnjim kutom $\sphericalangle DAN$ i P površina stakla kojeg brišu brisači. Tada je $P = 2 \cdot P_2 - 2 \cdot (P_1 - P_{\Delta ANS})$.

   Vrijedi $P_1 = \frac{b^2\pi\alpha}{360°} = \frac{2.25\pi}{12}$, $P_2 = \frac{b^2\pi 90°}{360°} = \frac{2.25\pi}{4}$, $P_{\Delta ANS} = \frac{|AN|\cdot|NS|}{2} = \frac{ab}{8} = \frac{2.25\sqrt{3}}{8}$ pa je $P = \frac{2.25\pi}{3} + \frac{2.25\sqrt{3}}{4}$. 2 BODA

   Dalje je $\frac{P}{P_{ABCD}} = \frac{2.25\cdot\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{2.25\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{4} \approx 85\%$. Brisači brišu približno 85% površine stakla. 2 BODA

   ………………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA